|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.Первообразная  2.Интеграл суммы, вынос const сомножителя  3.Интегрирование по частям, приведение к самому себе  4.Интегрирование рац дробей  5.Интегралы sin^n(x)dx, cos^n(x)dx, tg^n(x)dx, ctg^n(x)dx, R(sinx,cosx)dx  6.Интегрирование иррациональностей, транспедентных ф-й  7.Использование тригонометрических подстановок  8.Определенный интеграл  9.Пример задачи, порожд использование ОИ, геометрич смысл ОИ  10.Сумма Римана  11.Простейшие св-ва ОИ  12.Важнейшие св-ва, теорема о среднем, оценка ОИ  13.Теорема Барроу, ф-ла Ньютона Лейбница  14.Интегрирование по частям и замена переменной в ОИ  15.Использование ОИ для вычисления площадей плоских фигур(декартовы и полярн координаты)  16.Применение ОИ для вычисления длины дуги (плоской кривой), объема тела вращения.  17.Несобственные интегралы (НсИ)  18.По бесконечному промежутку и от неограниченной ф-ции  19.Признак сходимости НсИ  20.Признак сравнения НсИ 2 рода | 21.Вектор-функция, ее непрерывность и дифференцирование.  22.Формулы и правила дифференцирования вектор-функции.  23.Криволинейные инт 1 и 2 рода, их вычисление и связь.  24.Применение криволинейного интеграла для вычисления работы.  25.Числовой ряд, его сумма.  26.Ряд из членов геометрической прогрессии.  27.Необходимое условие сходимости ряда.  28.Линейное свойство сходящихся рядов Положительные ряды.  29.Признак сравнения (предельная и непредельная форма).  30.Признаки Коши и Даламбера (предельная и непредельная форма)  31.Интегральный признак сходимости.  32.Обобщенный гармонический ряд, теорема о его сходимости.  33.Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.  34.Абсолютная сходимость рядов  35.Функциональный ряд, его область сходимости.  36.Степенной ряд.  37.Теорема Абеля-Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.  38.Абсолютная сходимость степенного рядав интелвале сходимости.  39.Свойства степенных рядов (почленное дифференцирование и интегрирование).  40.Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора | 1.Первообразная  Интегрирование – процесс нах-я ф-и по ее произв. Ф-я, найденная в рез-е интегрирования – первообразная по отнош к заданной производной. F’(x)=f(x) или dF(x)=f(x)dx  Если функция f(х) непрерывна на [a, b], то при всех х[a, b] существует F’(x)=f(x)  Из этого рав-ва следует, что при любой постоянной С будет . Значит если ф-я имеет одну первообразную, то она имеет целое семейство первообразных, отлич-ся др от друга лишь на постоянную. | 2.Интеграл суммы, вынос const сомножителя 1)Неопределенный интеграл от алгебраической суммы равен сумме интегралов от слагаемых функций:  ]F’(x)=f(x), G’(x)=g(x) тогда ;  2)постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:  , a - постоянная | 3. Интегрирование по частям  d(uv)=udv+vdu; ; uv=;  приведение к самому себе: дважды разложить по частям, упростить, применить табличные формулы. |
| 4.Интегрирование рац дробей  4. +…+ Затем привести к общему знаменателю, приравнять коэфф при одинаковых степенях X и решить систему уравнений относит искомых коэффициентов | 5.Интеграл, , , , R(sinx,cosx)dx  , если n- нечетное положит число, то sinx=t; если m – нечетное положительное число, то cosx=t; если m,n – четные положительные числа, используют формулы sinxcosx=, ,  2.,  m-целое положительное число =x-1 или -1  == = tgx-x+C  3. – R-рациональн дробь, используем тригонометрич подстановку tx(x/2)=t. Тогда x=2arctgt и dx=, далее sinx=, cosx=. Получим | 7.Использование тригонометрических подстановок        Используя данные тригометрические постановки мы приведем интеграл к виду | 8.Определенный интеграл  Определенный интеграл:  Предел интегральной суммы при ранге дробления, стремящемся к нулю, называют определенным интегралом от функции F(x) по промежутку [a,b]∫cos^n(x)  *-*Определенный интеграл это придел от суммы Римана | 9.Пример задачи, порожд использование ОИ, геометрич смысл ОИ  Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.в этом состоит геом смысл опред интеграла.  Пример задачи, порожд. Использование ОИ.  Задачи на работу. Работа временной силы F, величина которой есть непрерывная функция F =F(х), действующей на отрезке [ab] , равна определенному интегралу от величины F(х) силы, взятому по отрезку [ab] . |
| 10.Сумма Римана  Предел суммы f(ξi) при ранге дробления стремящемся к нулю называется суммой римана. | 11.Простейшие св-ва ОИ  1.свойство линейности , если С1 и С2 – постоянные, а стоящие справа интегралы существуют.  2.свойство аддитивности при ,  3.Если f(x)0 при  4.Если f1(x)при , то  5.Если при, то  6.Если функция f(x) непрерывна на промежутке [a,b], то на этом промежутке найдется такая точка с, что | 12. Важнейшие св-ва ОИ, теорема о среднем, оценка ОИ  Формула Ньютона-Лейбница  Теорема Барроу - Если функция f(х) непрерывна на [a, b], то при всех х[a, b] существует F’(x)=f(x)  Теорема о среднем  Оценка определенного интеграла.Т1. Если функция кусочно-непрерывна на промежутке [a, b], то она интегрируема по этому промежутку. Т2. Если функция монотонна на промежутке [a, b] то она интегрируема по этому промежутку. | 13.Ф-ла Ньютона-Лейбница.  док-во:  Теорема Барроу.  Если функция непрерывна, то  док-во: I(x+∆x)= ; ∆I=I(x+∆x)-I(x)= ∆I= ξпринадлежит[x,x+∆x]; Ix’== ; таким образом всякая непрерывная функция y=f(x) имеет первообразную, одна из ко-ых интеграл | 14.Замена переменных  Если 1)x=φ(t) и ее производная x’=ф’(t) непрерывны при t[αβ];  2) множеством значений функции х=ф(t)при t[αβ] является отрезок [ab];  3) ф(α)=а и ф(β)= b,то  При вычислении ОИ методом подстановки возвращаться к старой переменной не надо  Часто вместо подстановки x=φ(t) применяют t=g(x)  Надо менять пределы интегрирования  Интегрирование по частям  Если функции u=u(x) v=v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [ab], то  На отрезке [ab] (uv)’=u’v+uv’.Следовательно фу-ия uv первообразная для непрерывной ф-ии u’v+uv’. Тогда по ф-ле Ньютона-Лейбница имеем:  Следовательно |
| 15.Вычисление площадей плоских вигур  Декартовы координаты  Площадь фигуры, ограниченной кривыми y=f1(x) y=f2(x), прямыми х=а и х=в при условии f1(x) ≥f2(x), можно найти по ф-ле  S=  Если плоская фигура имеет сложную форму, то прямыми параллельными оси Оу, ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить уже известные ф-лы.  Если криволинейная трапеция ограничена прямыми y=c y=d осью Оу и непрерывной кривой x=ф(у)≥0 то    Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заланной пареметрически  t[αβ]  Прямыми x=a x=b и осью Ох, то    Полярные коордиаты  Найдем площадь криволинейного сектора, те плоской фигуры, ограниченной непрерывнй линией r=r(ф) и двумя лучами ф=α и ф=β (α<β) где ф и r полярные координаты | 16.Применение ОИ для вычисления длины дуги (плоской кривой), объема тела вращения.  Если ф-ия y=f(x)и ее производная y’=f’(x)непрерывны на отрезке[ab] то кривая АВ имеет длину, равную    Если уравнение кривой АВ задано в параметрической форме α≤t≤β где и непрерывные функции с непрерывными производными и х(α)=а и х(β) =b    Если кривая АВ задана в полярных координатах r=r(*ф*) α≤*ф*≤β. Предположим, что r(*ф*) и r’(*ф*) непрерывны на отрезке [αβ]. Если в равенствах и ,связывающих полярные координаты и декартовы координаты, параметром считать *ф* то кривую АВ можно задать так | 17.Несобственные интегралы (НсИ) | 18.НсИ по бесконечным промежуткам  Пусть функция f задана на промежутке [a,+∞) и интегрируема на любом конечном промежутке. Тогда при любом b≥a существует  Интегралом от функции f по промежутку [a, +∞) будем называть  Такой интеграл называют несобственным.  Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, а функция интегрируема по соответствующему промежутку. Если же предел не существует, то интеграл называют расходящимся , а функцию – неинтегрируемой на этом промежутке. сходится при y<0 сходится при y>0 расходится при всех y сходится при p>1  **Формула Ньютона-Лейбница для НсИ**  F(+∞)=limF(b) (b→∞)  **Теорема об абсолютной сходимости**.  Если сходится , , то сходится | 19. Признак сходимости НсИ  **Теорема сравнения(непредельная форма)**  Пусть на промежутке [a,+∞) заданы две неотрицательные функции f1(x) и f2(x), интегрируемые на всяком конечном промежутке. Тогда если на всей области задания выполнено условие f1(x)  f2(x), то из сходимости интеграла 2 следует сходимость интеграла 1.  **Следствие.** Если выполнены условия теоремы и интеграл 1 расходится, то расходится 2.  **Теорема сравнения (предельная форма)**  Пусть на промежутке [a,+∞) заданы две неотрицательные функции f1(x) и f2(x), интегрируемые на всяком конечном промежутке. Тогда если существует  при х->+∞, причем l>0, то в отношении сходимости интегралы 1 и 2 ведут себя одинаково, т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся.  **следствие1**. если f(x) эквивалентно (p>1) при х->, то сходится.  **следствие2.** если f(x) эквивалентно (p<1) при х->+0, то сходится. |
| 20.Признак сравнения интеграла 2 рода:  Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы по любому отрезку [a+E,b](0<E<b-a) и при x > a удовлетворяют неравенствам тогда:  если сходится интеграл , то сходится интеграл  если расходится интеграл , то расходится интеграл , | 21.Вектор-функция, ее непрерывность и дифференцирование.  Вектор-функция F(M) непрерывна в точке М0 , если Вектор-функция F(M), непрерывная в каждой точке множества U, называется непрерывной на множестве U.  Правила дифференцирования вектор - функции F(t) аналогичны правилу дифференцирования скалярных функций | 22.Формулы и правила дифференцирования вектор-функции.  Дифференцирование вектор-функции**:** r’(t)==; dr=r’(t)dt  Формула Тейлора для вектор-функции одного скалярного аргумента: r(t0+Δt)=t(t0**)+** Δtr’(t0)+ r’’(t0)+…+ rn(t0)+ε(t0, Δt) | 24.Применение криволинейного интеграла для вычисления работы.  Криволинейный интеграл 2-го рода есть работа, совершаемая переменной силой F = P(x,y)i + Q(x,y)j на криволинейном пути AB. | **25.Числовой ряд, его сумма.**  Числовым рядом называется формально составленное выражение  **+ *u*2+…+  *un* =** , где ***u***1***, u***2 ***, …, u****n* ***,…***— некоторая последовательность  чисел. Элемент последовательности ***u****n*называют ***n-***м членом ряда. Сумма  первых ***n*** членов ряда называется ***n***-й частичной суммой ряда. Ряд  называется сходящимся, если существует и конечен предел последовательности  его частичных сумм; этот предел называется суммой ряда. Обозначают .    Если предел последовательности частичных сумм не существует или бесконечен,  то ряд называется расходящимся.    Если ряд сходится, то предел ***u****n*при ***n***равен нулю. Если предел ***u****n* при ***n***  отличен от нуля, то ряд расходится. |
| **26. Ряд из членов геометрической прогрессии.**  Геометрическая прогрессия. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число  q , называется геометрической  прогрессией. Число q называется знаменателем прогрессии.  Любой член геометрической прогрессии вычисляется по формуле: bn =  b1  q n  1 . Сумма  n  первых членов геометрической прогрессии вычисляется как: Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Это геометрическая прогрессия, у которой  | q | < 1 . Для неё определяется понятие суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а именно:  это число, к которому неограниченно приближается сумма  n первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа  n. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле: | **27. Необходимое условие сходимости ряда**  Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого  существовало число  такое, что при n>N и p>0  (*n* и *p* – натуральные числа) было выполнено неравенство В частности, если ряд сходится, то .  Условие является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда. | **28. Линейное свойство сходящихся рядов**  **Теорема 1:** *Если сходится ряд*  **+ *u*2+…+  *un* =**  (4)  *то сходится и ряд a***+ *au*2+…++ *aun* =,0<a<1**  **Теорема 2:** *Если ряд*  *сходится и его сумма равна S, то и ряд*  *, где с – некоторое число, также сходится, и его сумма равна cS.*  *.*  **Теорема 3:** *Если ряд*  *и сходятся и их*  *суммы соответственно равны S и http://works.tarefer.ru/50/100174/pics/image042.gif*  *, то и ряд сходится*  *и его сумма равна http://works.tarefer.ru/50/100174/pics/image055.gif.* | 29 Признак сравнения  Непредельный признак сравнения.  Пусть имеются два положительных ряда и что ≤ Тогда из сходимости второго ряда следует сходимость первого.  Предельный признак  Пусть имеются два положительных ряда и ,что существует предел причем >0 . Тогда в отношении сходимости оба ряда ведут себя одинаково, либо расходятся, либо сходятся | 30.Признаки Коши и Даламбера (предельная и непредельная форма)  Признак Коши (непредельная форма):  если для положительного ряда "сумма от k=1 до бесконечности а с индексом k" при всех k выполняется условие  "корень степени k от а с индексом k <= q < 1", то ряд сходится  (предельная форма):  дан положительный ряд "сумма от k=1 до бесконечности а с индексом k" что существует "лимит корень степени k  от а с индексом k при k->бесконечности = С" тогда при С<1 ряд сходится.  признак Даламбера (непредельная форма):  если для положительного ряда "сумма от к=1 до бесконечности а с индексли к" при всех к выполняется условие  "а с индексом к+1 / а с индексом к <= q < 1", то ряд сходится!  (предельная форма):  дан ряд "сумма от к=1 до бесконечности а с индексом к"  что "лимит от а с индексом к+1 / а с индексом к при к-> бесконечности =D"  при D<1 ряд сходится |
| 31.Интегральный признак сходимости:  Пусть на промежутке [a, +бесконечность) задана неотрицательная убывающая ф-ция f(x) такая,  что "f(k)=a с индексом к" при к=1,2,... Тогда ряд "сумма от к=1 до бесконечности а с индексом к"  и несобоственный интеграл "интеграл от 1 до бесконечности f(x)dx" либо оба сходяться, либо оба расходяться. | 32, Обобщенный гармонический ряд, теорема о его сходимости:  "сумма от к=1 до бесконечности 1 / (к^р)"---Обобщенный гармонический ряд!  р<0: то "1/(к^р) -> бесконечность" при к->бесконечность, значит ряд расходится.  p>0: f(x)=1/x^p , x принадлежит [1, бесконечность). f(k)=1/k^p вместо ряда рассматриваем несобственный интеграл:  интеграл от 1 до бесконечности dx/x^p---интеграл сходится только при p>1!  Теорема:  "Обобщенный гармонический ряд---"сумма от к=1 до бесконечности 1 / (к^р)"  сходится тогда и только тогда, когда р>1."  p=0 и p=1: расходится | ***33*. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.**  Знакочередующимся рядом называется ряд вида  где > 0 для всех (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).  **Признак Лейбница(достаточный признак сходимости).**  Знакочередующийся ряд сходится, если:  1.Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е.    2.Общий член ряда стремится к нулю: .  При этом сумма ряда удовлетворяет неравенствам | ***34.* Абсолютная сходимость рядов.**  Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.  **Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.** Пусть дан знакопеременный ряд  Если сходится ряд  Составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.  Основные свойства абсолютно сходящихся рядов:  1.Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму , то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму , что и исходный ряд (теорема Дирихле).  2.Абсолютно сходящиеся ряды с суммами можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна (или соответственно ).  3.Под произведением двух рядов понимают ряд вида  Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна . | ***35*. Функциональный ряд, его область сходимости.**  Ряд, членами которого являются функции от , называется *функциональным*:  Придавая определенное значение , мы получим числовой ряд  Который может быть как сходящимся, так и расходящимся.  Если полученный числовой ряд сходится, то точка называется ***точкой сходимости*** ряда; если же ряд расходится – ***точкой расходимости*** функционального ряда.  Совокупность числовых значений аргумента , при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости.*** |
| ***36.* Степенной ряд.**  Ряд, членами которого являются степенные функции аргумента , называется ***степенным рядом.***  Действительные (или комплексные) числа называются ***коэффициентами ряда,***  - действительная переменная. | ***37*. Теорема Абеля – Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.**  **Теорема Абеля.** Если степенной ряд сходится при , то он абсолютно сходится при всех значениях , удовлетворяющий неравенству .  **Следствие.** Если степенной ряд расходится при , то он расходится и при всех , удовлетворяющих равенству .  Интервал , состоящий из точек сходимости ряда, называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив , интервал сходимости можно записать в виде . Число называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. - это такое число, что при всех , для которых , ряд абсолютно сходится, а при ряд расходится.  ***Замечания.***  1.Если , то можно убедиться, что ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае . Если , то .  2.Интервал сходимости степенного ряда находят из неравенства ; имеет вид  3.Если степенной ряд содержит не все степени , т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формула R), а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда. | 38.Абсолютная сходимость степенного рядав интелвале сходимости.  Степеной ряд абсолютно сходится в любой точке интевала сходимости!  для степенного ряда "сумма от к=0 до бесконечности (с с индексом к)\*(х-а)^k"  интервал сходимости имеет вид (a-R, a+R) где R-радиус сходимости степенного ряда.  берём точку х из интервала сходимости. в интервале найдется точка х0 такая, что |x|<|x0|,  т. к. нет ни самой правой ни самой левой точки в интервале.  но х0 тоже принадлежит интервалу сходимости по теореме Абеля, значит ряд абсолютно сходится в точке х! | 39.Свойства степенных рядов ( почленное дифференцирование и интегрирование ).  1.Сумма S(x) степенного ряда ( ) является непрерывной функцией в интервале сходимости ( -R;R ).  2.Степенные ряды , имеющие радиусы сходимости соответственно , можно почленно сладывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел .  3.Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда   (1.1) при –R<x<R выполняется равенство  4.Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (1.1) при –R<a<x<R, выполняется равенство | 40. Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора.  Где  - ряд Тейлора. (1.2)  Т. Для того чтобы ряд Тейлора ( 1.2 ) функции f(x) сходился к f(x) в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора ( 1.1 ) стремился к нулю при , т.е. чтобы . |
|  |  |  |  |  |